Etude de documents - correction
La musique est une science

Mots-clefs : gamme ; harmonies

A. Problématique

• Un mélomane est capable de percevoir à l'oreille si une musique est harmonieuse ou non. Il n'est pas nécessaire d'être mathématicien pour apprécier la musique. Pourtant… « la musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie les nombres » (G. W. LEIBNIZ, 1712).

→ Comment l'harmonie et les gammes permettent-elles de comprendre que la musique est une discipline scientifique ?

B. Documents

Document 1 Historique de l'harmonie

« Selon Jamblique (env. 250-330 ap. J.-C.), auteur de *Vie de Pythagore*, PYTHAGORE passa un jour devant l'atelier d'un forgeron et écouta les marteaux battre le fer. Certaines combinaisons de sons étaient harmonieuses, d'autres moins. Il étudia les marteaux et s'aperçut que deux sons étaient harmonieux lorsque les masses des deux marteaux étaient dans un rapport simple de nombres entiers.

Que cette histoire soit vraie ou simplement une légende, il apparaît acquis que Pythagore a le premier mis en évidence le fait que l'oreille humaine est sensible aux *rapports simples de fréquences* existant entre les sons. […] Les rapports simples de fréquences ont reçu des noms particuliers. L'intervalle qui correspond à un rapport de fréquences égal à deux s'appelle une octave. […] L'octave est l'intervalle fondamental qui délimite la gamme. C'est l'intervalle qui existe entre le premier et le deuxième Do dans l'énumération Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do. »

Extrait de F. BRUNAULT, « Musique et Mathématiques », *CASA info*, n° 77, déc. 2002, www.umpa.ens-lyon.fr

Document 2 Harmonies

L'oreille humaine est sensible au rapport entre les fréquences de deux notes jouées simultanément. Lorsqu'un instrument émet un La_3, de fréquence fondamentale f_1 = 440 Hz, l'oreille perçoit un son de fréquence f_1 et, suivant l'instrument, des harmoniques de fréquence $f_2 = 2 f_1$, $f_3 = 3 f_1$, etc. Quand une deuxième note est émise, un La_4 de fréquence fondamentale f'_1 = 880 Hz, l'oreille entend déjà ce son dans les harmoniques du La_3. Il en est de même du deuxième harmonique du La_4 de fréquence :

$$f'_2 = 2 f'_1 = 1760 \text{ Hz} = 4 \times 440 = 4 f_1$$

Plus les harmoniques de deux notes ont des fréquences communes, plus ces notes sont harmonieuses à l'oreille. Elles sont consonantes.

On parlera d'harmonie entre deux notes lorsque le rapport des fréquences de leur fondamental est « simple ». Le rapport le plus simple est celui qui a pour valeur 2. Les deux notes sont dites à l'octave. Jouées simultanément, ces deux notes semblent n'en faire qu'une.

Il existe d'autres rapports simples représentés dans le tableau ci-dessus.

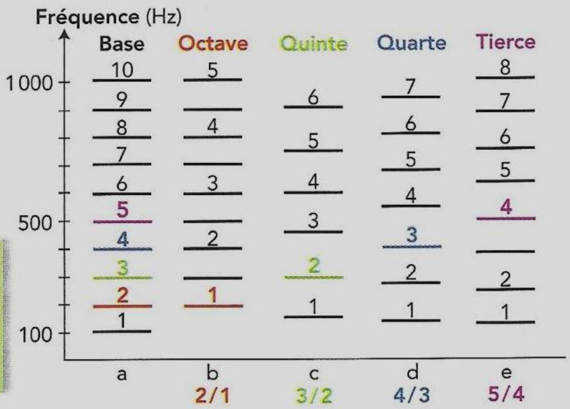
Ainsi, sur la représentation ci-contre, le rapport de la fréquence du fondamental du son (c) sur celle du fondamental du son (a) est égal à $\frac{3}{2}$. Le son (c) est dit à la quinte du son (a). On constate également que la fréquence du 3e harmonique du son (a) est égale à celle du 2e harmonique du son (c).

Deux notes à la quinte se distinguent mieux, se fondent moins, que deux notes à l'octave, car elles ont moins d'harmoniques en commun.

Rapport des fréquences fondamentales	Position par rapport à la note de référence	Nom	Exemple
$\frac{2}{1}$	8	Octave	Do – Do
$\frac{3}{2}$	5	Quinte	Do – Sol
$\frac{4}{3}$	4	Quarte	Do – Fa
$\frac{5}{4}$	3	Tierce majeure	Do – Mi

Quelques accords harmonieux.

Analyse spectrale comparée de cinq sons harmonieux. Le son (a) est choisi comme référence.



Document 3 Gammes

Il y a eu, dans l'Histoire, de nombreuses constructions de gammes pour ordonner les notes au sein d'une octave. Les premières gammes furent appelées naturelles, car elles étaient construites à partir de sons émis par des cordes vibrantes de différentes longueurs. Ces gammes, comme **la gamme de PYTHAGORE**, présentent un inconvénient important. Les rapports de fréquences entre des notes consécutives ne sont pas constants. On ne peut donc pas transposer dans une autre tonalité toutes les notes d'une œuvre musicale.

Jean-Sébastien BACH (1685-1750) résout ce problème en créant **la gamme tempérée**.

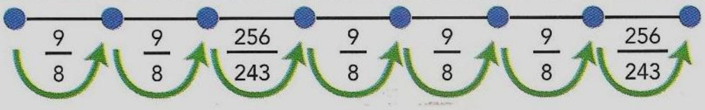
• La gamme de PYTHAGORE

Elle correspond à des notes obtenues par des cordes vibrantes dont les rapports de longueurs, égaux à $\frac{3}{2}$, sont considérés harmonieux. Ces notes, dont les rapports de fréquences sont aussi de $\frac{3}{2}$, forment des **quintes**.

Il est possible, par quintes successives, de retrouver les fréquences des notes d'une octave :
– par quintes montantes, la fréquence d'une note de base est multipliée par 1,5, puis si besoin divisée par 2 pour être dans l'intervalle de fréquences correspondant à l'octave de la note de base. En procédant de la même manière à partir de la note obtenue, on construit une série de notes dont les six premières sont affectées d'un nom simple (Do, Ré, Mi, Sol, La, Si) ;
– par quintes descendantes, la fréquence d'une note de base est divisée par 1,5, puis si besoin mutipliée par 2 pour être dans l'intervalle de fréquences correspondant à l'octave. En procédant de la même manière à partir de la note obtenue, on construit une autre série de notes dont la première est affectée d'un nom simple (Fa).

Les autres notes de l'octave sont dites altérées, et notées dièse (#) ou bémol (b). Elles ne sont pas conservées si leurs fréquences sont trop proches les unes des autres. Le tableau ci-dessous indique les rapports de fréquences entre deux notes non altérées consécutives.

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Fréquence (Hz)	100,0	112,5	126,6	133,3	150,0	168,8	189,8	200,0



L'enchaînement Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do d'une octave de la gamme de Pythagore construite à partir d'un Do de fréquence 100 Hz.

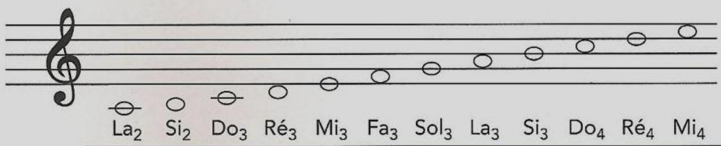
• La gamme tempérée ou à tempérament égal

Douze notes sont placées sur une octave qui est alors divisée en douze intervalles appelés demi-tons.

Ces notes sont Do, Do#, Ré, Mib, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La# et Si.

Remarques : « # » se lit dièse ; « b » se lit bémol (voir **fiche 5**, p. 202).

Le rapport de fréquences entre deux notes consécutives de fréquences respectives f_1 et f_2 est constant : $\frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{1}{12}}$.



La$_2$	Si$_2$	Do$_3$	Ré$_3$	Mi$_3$	Fa$_3$	Sol$_3$	La$_3$	Si$_3$	Do$_4$	Ré$_4$	Mi$_4$
220,00	246,94	261,63	293,66	329,63	349,23	392,00	440,00	493,88	523,25	587,33	659,26

Fréquence (Hz)

Quelques notes de musique de la gamme tempérée et leurs fréquences.

C. Analyse et synthèse

1. Quel est le rapport de fréquences entre deux notes séparées d'une octave, d'une quinte ou d'une tierce ? → *doc. 2*

Le rapport de fréquences entre deux notes séparées d'une octave est 2 soit f(octave) = 2xf.
Le rapport de fréquences entre deux notes séparées d'une quinte est 3/2 soit f(quinte) = 3/2xf.
Le rapport de fréquences entre deux notes séparées d'une tierce est 5/4 soit f(tierce) = 5/4xf.

2. Quelle position occupe une note à la quinte d'une première note dans l'enchaînement Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si ?

Si la première note est Do alors la quinte est Sol, en effet f(Sol) = 1,5 x f(Do) (tableau doc 3).
Si la première note est Ré alors la quinte est La, si la première note est Mi alors la quinte est Si, si la première note est Fa alors la quinte est Do, et ainsi de suite.

3. Vérifier alors que le texte et le tableau du document 3 sont en accord.

On vérifie que le texte et le tableau sont en accord :
f(Do) = 100 Hz alors la quinte Sol aura pour fréquence f(Sol) = 1,5xf(Do) = 1,5 x 100 = 150 Hz
f(Ré) = 112,5 Hz alors la quinte La aura pour fréquence f(La) = 1,5xf(Ré) = 1,5 x 112,5 = 168,8 Hz
f(Mi) = 126,6 Hz alors la quinte La aura pour fréquence f(Si) = 1,5xf(Mi) = 1,5 x 126,6 = 189.9 Hz
f(Fa) = 133,3 Hz alors la quinte La aura pour fréquence f(Do) = 1,5xf(Fa) = 1,5 x 133,3 = 199.9 Hz

De plus on peut vérifier que $f(Si_2) = 2^{1/12} \times 2^{1/12} \times f(La_2)$, en utilisant le rapport de fréquence entre deux notes consécutives : en effet $f(Si_2) = 2^{1/12} \times f(La_2\#) = 2^{1/12} \times 2^{1/12} \times 220 = 246,94$ Hz

4. Combien de demi-tons contient une octave de la gamme tempérée ? Quel est le rapport de fréquences entre deux demi-tons consécutifs ? Exprimer f_n en fonction de f_1 → ***doc. 3***

Une octave de de la gamme tempérée contient 12 demi-tons et on a le rapport de fréquence entre deux notes consécutives : $f_2/f_1 = 2^{1/12}$.
En multipliant membre à membre les égalités $f_2/f_1 = 2^{1/12}$;
$f_3/f_2 = 2^{1/12}$.
$f_4/f_3 = 2^{1/12}$ **et ainsi de suite, on obtient l'égalité**

$$f_n/f_1 = 2^{(n-1)/12} .$$

5. L'intervalle de fréquence est-il constant dans la gamme de Pythagore ? Dans la gamme tempérée ?

Dans la gamme de Pythagore les intervalles de fréquences ne sont pas constants car parfois égaux à 9/8 et parfois à 256/243.
En revanche dans la gamme tempérée, les intervalles de fréquences sont réguliers égaux à $2^{1/12}$

6. Donner la définition historique d'un son harmonieux. → ***doc. 1***

Historiquement, deux sons sont harmonieux lorsque le rapport de leurs fréquences est un rapport simple de nombres entiers.

7. Proposer plusieurs accords harmonieux avec trois notes de la gamme tempérée. → ***doc. 1***

Un accord harmonieux peut être (Do Mi La) car f(Mi) / f(Do) = 5/4 et f(La) /f(Mi) = 4/3
Ou encore (Sol Si Ré) car f(Si) / f(Sol) = 5/4 et f(Ré) /f(Si) = 32/27

8. **Bilan** : A l'aide de ces documents, expliquer en quelques lignes pourquoi la musique peut être considérée comme une discipline scientifique

La musique peut être considérée comme une discipline scientifique car d'une part les lois empiriques des sons et musiques harmonieux ont été mis en équations pour être mieux compris et expliqués.
D'autre part les sons eux même produits par la voix ou des instruments ont été scrupuleusement analysés par des méthodes physiques et mathématiques.